Année académique 2023–2024

PHYS-F432 – THÉORIE DE LA GRAVITATION

– Quatrième séance d'exercices –

géodésiques

Exercice 1 : géodésiques sur la 2-sphère. On considère la sphère S^2 munie de sa métrique naturelle, $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2$.

a. Écrire les équations d'Euler-Lagrange pour les géodésiques.

b. En déduire les $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ pour la métrique ci-dessus.

c. Déterminer les géodésiques de S^2 en minimisant la longueur d'une courbe joignant deux points. Sans perte de généralité, on peut choisir les axes tels que les coordonnées de ces points soient $P_1 = (\theta_1, \phi_0)$ et $P_2 = (\theta_2, \phi_0)$.

Exercice 2. Calculer les géodésiques temporelles de la métrique $\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}t^2}{t^2}$.

Indication : Paramétriser les géodésiques par le temps propre : ceci donne une première constante du mouvement. En déduire une deuxième de l'équation d'Euler-Lagrange pour la coordonnée x.

Exercice 3 : référentiel en chute libre. Au cours, vous avez énoncé (et démontré en partie) le théorème suivant :

> **Théorème.** *Soit une géodésique de genre temps. Il existe (au moins) un système de coordonnées tel que*
>
> *(a) La géodésique ait pour équation $x^k(x^0) = 0$ (cette propriété est vraie pour n'importe quel observateur accéléré) ;*
>
> *(b) Le temps propre le long de la géodésique soit donné par x^0 (cette propriété est aussi vraie pour n'importe quel observateur accéléré) ;*
>
> *(c) On puisse poser $g_{\alpha\beta}(x^0, 0) = \eta_{\alpha\beta}$ c'est-à-dire mettre la métrique sous forme minkowskienne tout le long de la géodésique ;*
>
> *(d) On puisse poser $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(x^0, 0) = 0$, c'est-à-dire annuler les coefficients de Christoffel tout le long de la géodésique.*

Les points (a), (b) et (c) ont été démontrés au cours théorique. Comme échauffement, nous allons remontrer le point (c) et ensuite démontrer le (d).

Indication pour le point (c) : appelons $\tilde{x}^\mu$ les coordonnées telles que les conditions (a)-(b)-(c) soient satisfaites, et x'^μ celles vérifiant seulement (a) et (b). On pose

$$\begin{aligned} x'^0 &= \tilde{x}^0 + L^0_k(\tilde{x}^0)\tilde{x}^k \\ x'^k &= \tilde{x}^k \end{aligned}$$

Vérifier que dans les coordonnées $\tilde{x}^\mu$, (a) et (b) sont toujours vérifiées, puis déterminer L^0_k.

Indication pour le point (d) : regarder ce que devient l'équation des géodésiques étant donné les points précédents et utiliser la seule liberté qui reste au niveau des changements de coordonnées, à savoir les rotations $x^k = R^k_l(x'^0)x'^l$.